第4期 2008年4月
电 子 学 报
ACTA ELECTRONICA SINICA
Vol.36 No.4 Apr. 2008

M通道LPPRFB分析滤波器对称性与长度的选择方法研究

彭安金[1],庄圣贤[2]
(1.西南民族大学电气信息工程学院,四川成都 610041;2.西南交通大学电气工程学院,四川成都 610031)

摘 要: 根据M通道LPPRFB的线性相位和理想重建特性,本文不仅找到了选择分析滤波器对称性与长度的充要条件,而且还从理论上推导出了分析滤波器类型组合以及分析滤波器长度之间的关系,从而提出M通道LPPRFB分析滤波器对称性与长度选择的一般方法.严格的理论推导以及目前文献所报道的LPPRFB研究结果,均验证了此方法的通用性和有效性.

关键词: 多速率滤波器组;线性相位;理想重建;分析滤波器类型组合
中图分类号: TN713 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112(2008)04-0627-05

A Method for Choosing Analysis Filters Symmetry Polarities and Lengths of M-Channel LPPRFB

PENG An-jin[1],ZHUANG Sheng-xian[2]
(1. *School of Electrical and Information Engineering, Southwest University for Nationalities, Chengdu, Sichuan* 610041, *China*;
2. *School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan* 610031, *China*)

Abstract: On the basis of linear phase and perfect reconstruction characteristics of M-channel LPPRFB, not only is the necessary and sufficient condition for choosing analysis filters' symmetry polarities and lengths found, but also the permissible combinations of analysis filters and the relation of analysis filters' lengths are derived. Consequently, a general method for choosing analysis filters' symmetry polarities and lengths of M-channel LPPRFB is proposed. The generality and availability of the method is verified by the strict derivations and the results of M-channel LPPRFB reported in the literature.

Key words: filter banks; linear phase; perfect reconstruction; permissible combinations of analysis filters

1 引言

多速率滤波器组理论是多速率数字系统的基础,也是多速率数字信号处理领域的研究热点.具有线性相位和理想重建特性的多速率滤波器组,称之为线性相位的理想重建滤波器组(Linear Phase Perfect Reconstruction Filter Banks(LPPRFB)).线性相位的理想重建滤波器组无论在空中预警,电子对抗,超宽带雷达,软件无线电等军用领域,还是在移动通信,图像压缩,医疗仪器,宽带A/D转换等民用领域,均具有广阔的应用前景,因而LPPRFB的设计引起了研究人员的极大兴趣.设计M通道LPPRFB的难点在于如何确定其M个分析滤波器的对称性与长度.对于两通道的LPPRFB,文献[1]研究了分析滤波器的对称性组合及长度奇偶性组合,并得到了A、B两类有效系统;文献[2]用分析滤波器类型组合表示了这两类系统,因此只要选择此组合,即可确定每个分析滤波器的类型.类型确定,则对称性确定;文献[3]则讨论了分析滤波器的长度选择方法.显然,两通道LPPRFB的分析滤波器对称性与长度的选择问题已得到解决.

然而,对于M通道的LPPRFB,其滤波器对称性与长度的选择却一直未能找到一般性方法[4],即如何确定每个滤波器是奇对称,还是偶对称,以及按何种关系选其长度.尽管文献[4～6]对此问题进行了较深入的研究,但其研究结果不能同时兼顾滤波器对称性选择通用性与滤波器长度选择通用性.T D Tran和T Q Nguyen[4]的研究结果在滤波器长度选择方面具有通用性,但在滤波器对称性选择方面有很大局限性;P Saghizadeh和A N Willson,Jr.[5]的研究结果在滤波器对称性选择方面有所突破,但在滤波器长度选择方面有很大局限性;而S Basu和H Choi[6]的研究结果与T D Tran和T Q Nguyen的类

收稿日期:2006-10-27;修回日期:2007-11-25
基金项目:国家自然科学基金(No.60603009/F020104)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

似. 滤波器对称性选择通用性与滤波器长度选择通用性不能兼顾的问题,显然不是 M 通道 LPPRFB 固有的. 究其原因,是研究人员未能从理论上找到 M 通道 LPPRFB 的滤波器对称性与长度的内在联系. 因而, M 通道 LPPRFB 的分析滤波器类型组合问题研究未能取得突破. 即如何确定每个分析滤波器的类型以及如何确定由这 M 个分析滤波器类型构成的所有组合.

本文以 M 通道 LPPRFB 的线性相位和理想重建特性为基础,先推出 M 通道 LPPRFB 的分析滤波器对称性组合,然后推出其分析滤波器长度选择方法,最后再根据分析滤波器的对称性组合及长度奇偶性组合推出 M 通道 LPPRFB 的分析滤波器类型组合,进而提出 M 通道 LPPRFB 分析滤波器对称性与长度选择的一般方法.

2 分析滤波器对称性组合

M 通道 LPPRFB 由分析滤波器组、抽取器、零值内插器、综合滤波器组构成. 为了推出分析滤波器组中分析滤波器对称性组合,即确定由每个分析滤波器的对称性(偶对称或奇对称)构成的所有组合,本文先分析 M 通道 LPPRFB 的线性相位和理想重建特性. 线性相位特性是指 LPPRFB 的滤波器均为线性相位 FIR 滤波器,理想重建特性则表明其混迭失真,幅度失真,相位失真均已消除. 根据文献[7],混迭失真消除的条件为

$$\begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) & \cdots & H_{M-1}(z) \\ H_0(zW) & H_1(zW) & \cdots & H_{M-1}(zW) \\ H_0(zW^2) & H_1(zW^2) & \cdots & H_{M-1}(zW^2) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ H_0(zW^{M-1}) & H_1(zW^{M-1}) & \cdots & H_{M-1}(zW^{M-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ F_2(z) \\ \cdots \\ F_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MT(z) \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 $W = e^{-j(2\pi/M)}$, $H_k(z)$ 和 $F_k(z)$ 分别为第 k 通道的分析滤波器和综合滤波器 $(0 \le k \le M-1)$, $T(z)$ 是 M 通道 LPPRFB 的传递函数(失真函数),将上述条件改写为

$$\mathrm{H}(z)\,\mathrm{f}(z) = \mathrm{t}(z) \tag{1}$$

其中 $\mathrm{H}(z)$ 是混迭分量(alias component)矩阵, $\mathrm{f}(z)$ 是综合滤波器向量, $\mathrm{t}(z) = [MT(z), 0, \cdots, 0, 0]^{\mathrm{T}}$;而消除幅度失真和相位失真的条件为

$$T(z) = cz^{-n_d} \tag{2}$$

其中 c, n_d 均为常数. 显然,将 $T(z)$ 约束为一个偶对称、奇长度,且仅有中心点系数 c 不为零的 FIR 滤波器是合理的. 因此,如果找到 $T(z)$ 和 $\mathrm{H}(z)$ 之间的关系,就能根据 $T(z)$ 的偶对称特性推出分析滤波器对称性组合.

2.1 冲击响应系数 t(n)

$t(n)$ 是 $T(z)$ 的冲击响应系数,为了求得 $t(n)$,用克兰姆法则求解式(1)得

$$F_k(z) = MT(z)(-1)^k \det \mathrm{H}_{-0k}(z) / \det \mathrm{H}(z) \tag{3}$$

其中 $\mathrm{H}_{-jk}(z)$ 由 $\mathrm{H}(z)$ 矩阵删除 j 行和 k 列而得到 $(0 \le j, k \le M-1)$. 为了保证第 k 通道综合滤波器 $F_k(z)$ 为 FIR 滤波器,令

$$\det \mathrm{H}(z) = MT(z) \tag{4}$$

由式(3)、(4)得

$$F_k(z) = (-1)^k \det \mathrm{H}_{-0k}(z), \quad (0 \le k \le M-1) \tag{5}$$

由式(4)得

$$T(z) = \frac{1}{M} \det \mathrm{H}(z) \tag{6}$$

根据式(5)、(6), $t(n)$ 表示为[5]

$$t(n) = \begin{cases} q(n), & n = M\left(\dfrac{M-1}{2}\right) + r \\ 0, & n \ne M\left(\dfrac{M-1}{2}\right) + r \end{cases} \tag{7}$$

其中
$$q(n) = \sum_{\substack{\text{over all combinations of} \\ n_k \in \sum_{k=0}^{M-1} n_k = n}} \left[\prod_{k=0}^{M-1} h_k(n_k)\right] \det \mathrm{U}_{-00} \tag{8}$$

r 为整数, n_k 是 $h_k(n_k)$ 的变量 $(0 \le k \le M-1)$, $\in$ 表示满足某个条件的 $\det \mathrm{U}_{-00}$ 为:

若 M 为偶,则

$$\det \mathrm{U}_{-00} = \det \begin{bmatrix} W^{-n_1} & W^{-n_2} & \cdots & W^{-n_{M-1}} \\ W^{-2n_1} & W^{-2n_2} & \cdots & W^{-2n_{M-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W^{-(M/2-1)n_1} & W^{-(M/2-1)n_2} & \cdots & W^{-(M/2-1)n_{M-1}} \\ W^{-(M/2)n_1} & W^{-(M/2)n_2} & \cdots & W^{-(M/2)n_{M-1}} \\ W^{(M/2-1)n_1} & W^{(M/2-1)n_2} & \cdots & W^{(M/2-1)n_{M-1}} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ W^{2n_1} & W^{2n_2} & \cdots & W^{2n_{M-1}} \\ W^{n_1} & W^{n_2} & \cdots & W^{n_{M-1}} \end{bmatrix}$$

若为奇,则

$$\det \mathrm{U}_{-00} = \det \begin{bmatrix} W^{-n_1} & W^{-n_2} & \cdots & W^{-n_{M-1}} \\ W^{-2n_1} & W^{-2n_2} & \cdots & W^{-2n_{M-1}} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ W^{-((M-1)/2)n_1} & W^{-((M-1)/2)n_2} & \cdots & W^{-((M-1)/2)n_{M-1}} \\ W^{((M-1)/2)n_1} & W^{((M-1)/2)n_2} & \cdots & W^{((M-1)/2)n_{M-1}} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ W^{2n_1} & W^{2n_2} & \cdots & W^{2n_{M-1}} \\ W^{n_1} & W^{n_2} & \cdots & W^{n_{M-1}} \end{bmatrix}$$

2.2 分析滤波器对称性

每个分析滤波器的对称性包括奇对称和偶对称两

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

种,但它究竟是奇对称还是偶对称?则只有可通过 $t(n)$ 的对称性才能确定. 式(7)表明 $t(n)$ 的偶对称,可以通过选择 $q(n)$ 为偶对称来实现,故本文分析 $q(n)$ 的对称性. 在分析之前,先寻求矩阵 U_{-00} 及其共轭矩阵的关系. 当 M 为偶时,将 U_{-00} 进行 $M/2-1$ 次行对换,就可得到 U_{-00} 的共轭矩阵 U^*_{-00},当 M 为奇时,将 U_{-00} 进行 $(M-1)/2$ 次行对换,就可得到 U_{-00} 的共轭矩阵 U^*_{-00},故矩阵 U_{-00} 及 U^*_{-00} 的关系表示为:

若 M 为偶,则

$$\det \mathrm{U}^*_{-00} = \begin{cases} \det \mathrm{U}_{-00}, & (M = 4k_M + 2) \\ -\det \mathrm{U}_{-00}, & (M = 4k_M) \end{cases} \tag{9}$$

若 M 为奇,则

$$\det \mathrm{U}^*_{-00} = \begin{cases} \det \mathrm{U}_{-00}, & (M = 4k_M + 1) \\ -\det \mathrm{U}_{-00}, & (M = 4k_M + 3) \end{cases} \tag{10}$$

由于式(2)表明 $T(z)$ 是一个偶对称、奇长度的 FIR 滤波器. 为了使 $t(n)$ 偶对称,根据式(7),令 $q(n)$ 为偶对称. 故 $q(n)$ 满足

$$q(n) = q(N-1-n) = \sum_{\substack{\text{over all combinations of} \\ n_k \in \sum_{k=0}^{M-1} n_i = n}} \left[\prod_{k=0}^{M-1} h_k(N_k - 1 - n_k)\right] \det \mathrm{V}_{-00} \tag{11}$$

其中,N_k 是第 k 通道分析滤波器 $H_k(z)$ 的长度,矩阵 V_{-00} 与矩阵 U_{-00} 基本相同,只不过是 n_k 被替换成了 $N_k - 1 - n_k (1 \le k \le M-1)$,$N$ 是 $q(n)$ 的长度,并且 $N = \left(\sum_{k=0}^{M-1} N_k\right) - (M-1)$. 为了根据式(11)确定分析滤波器的对称性组合,关键是要得到行列式 $\det \mathrm{V}_{-00}$ 和行列式 $\det \mathrm{U}_{-00}$ 之间的关系. 为了简单起见,将 M 分为奇偶两种情况来考虑.

(1) 当 M 为偶时,先从行列式 $\det \mathrm{V}_{-00}$ 的 m 行提取因子 $W^{-m(N_1-1)}$,再从 $M-m$ 行提取因子 $W^{m(N_1-1)}$ 后 $(1 \le m \le M/2-1)$,可得

$$\det \mathrm{V}_{-00} = (-1)^{N_1-1} \begin{vmatrix} W^{n_1} & W^{-(N_2-N_1)} W^{n_2} & \cdots & W^{-(N_{M-1}-N_1)} W^{n_{M-1}} \\ W^{2n_1} & W^{-2(N_2-N_1)} W^{2n_2} & \cdots & W^{-2(N_{M-1}-N_1)} W^{2n_{M-1}} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ W^{(M/2-1)n_1} & W^{-(M/2-1)(N_2-N_1)} W^{(M/2-1)n_2} & \cdots & W^{-(M/2-1)(N_{M-1}-N_1)} W^{(M/2-1)n_{M-1}} \\ W^{(M/2)n_1} & W^{-(M/2)(N_2-N_1)} W^{(M/2)n_2} & \cdots & W^{-(M/2)(N_{M-1}-N_1)} W^{(M/2)N_{M-1}} \\ W^{-(M/2-1)n_1} & W^{(M/2-1)(N_2-N_1)} W^{-(M/2-1)n_2} & \cdots & W^{(M/2-1)(N_{M-1}-N_1)} W^{-(M/2-1)n_{M-1}} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ W^{-2n_1} & W^{2(N_2-N_1)} W^{-2n_2} & \cdots & W^{2(N_{M-1}-N_1} W^{-2n_{M-1}} \\ W^{-n_1} & W^{(N_2-N_1)} W^{-n_2} & \cdots & W^{-(N_{M-1}-N_1)} W^{-n_{M-1}} \end{vmatrix} \tag{12}$$

不难发现,在行列式 $\det \mathrm{V}_{-00}$ 中,除第 1 列外,每个元素均有因子 $W^{-m(N_k-N_1)}$ 或 $W^{m(N_k-N_1)}$ 相乘 $(2 \le k \le M-1)$,但行列式 $\det \mathrm{V}_{-00}$ 中的对应因子为 1. 故令

$$W^{N_k - N_1} = 1, \quad (2 \le k \le M-1) \tag{13}$$

式(13)揭示了分析滤波器对称性与长度的内在联系,而且可用数学归纳法证明式(13)是 M 通道 LPPRFB 的分析滤波器对称性与长度都必须满足的充要条件. 下面就根据式(13)推导 M 通道 LPPRFB 的分析滤波器对称性组合. 显然,分析滤波器 $H_k(z)$ 的对称性关系可定义为

$$h_k(N_k - 1 - n_k) = s_k h_k(n_k), \quad (0 \le k \le M-1) \tag{14}$$

其中,s_k 为滤波器 $H_k(z)$ 的对称系数,$H_k(z)$ 偶对称时为 1,奇对称时为 -1. 由式(9)、(12)、(13)可得

$$\det \mathrm{V}_{-00} = \begin{cases} (-1)^{N_1-1} \det \mathrm{U}_{-00}, & (M = 4k_M + 2) \\ (-1)^{N_1} \det \mathrm{U}_{-00}, & (M = 4k_M) \end{cases} \tag{15}$$

由式(11)、(14)、(15)得

$$\prod_{k=0}^{M-1} s_k = \begin{cases} (-1)^{-N_1}, & (M = 4k_M) \\ (-1)^{-(N_1-1)}, & (M = 4k_M + 2) \end{cases} \tag{16}$$

根据式(16)分析滤波器的对称性组合可表示为:当 N_1 为偶,且 $M = 4k_M$ 时,奇对称分析滤波器的数目 N_a 为偶;当 N_1 为奇,且 $M = 4k_M$ 时,N_a 为奇;当 N_1 为偶,且 $M = 4k_M + 2$ 时,N_a 为奇;当 N_1 为奇,且 $M = 4k_M + 2$ 时,N_a 为偶;而偶对称分析滤波器的数目为 $M - N_a$.

(2) 当 M 为奇时,先从行列式 $\det \mathrm{V}_{-00}$ 的 m 行提取因子 $W^{-m(N_1-1)}$,再从 $M-m$ 行提取因子 $W^{m(N_1-1)}$ 后 $(1 \le m \le M/2-1)$,可得

$$\det \mathrm{V}_{-00} = \begin{vmatrix} W^{n_1} & W^{-(N_2-N_1)} W^{n_2} & \cdots & W^{-(N_{M-1}-N_1)} W^{n_{M-1}} \\ W^{2n_1} & W^{-2(N_2-N_1)} W^{2n_2} & \cdots & W^{-2(N_{M-1}-N_1)} W^{2n_{M-1}} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ W^{((M-1)/2)n_1} & W^{-((M-1)/2)(N_2-N_1)} W^{((M-1)/2)n_2} & \cdots & W^{-((M-1)/2)(N_{M-1}-N_1)} W^{((M-1)/2)n_{M-1}} \\ W^{-((M-1)/2)n_1} & W^{((M-1)/2)(N_2-N_1)} W^{-((M-1)/2)n_2} & \cdots & W^{((M-1)/2)(N_{M-1}-N_1)} W^{-((M-1)/2)n_{M-1}} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ W^{-2n_1} & W^{2(N_2-N_1)} W^{-2n_2} & \cdots & W^{2(N_{M-1}-N_1} W^{-2n_{M-1}} \\ W^{-n_1} & W^{(N_2-N_1)} W^{-n_2} & \cdots & W^{(N_{M-1}-N_1)} W^{-n_{M-1}} \end{vmatrix} \tag{17}$$

由式(10)、(13)、(17)可得

$$\det \mathrm{V}_{-00} = \begin{cases} \det \mathrm{U}_{-00} & (M = 4k_M + 1) \\ -\det \mathrm{U}_{-00} & (M = 4k_M + 3) \end{cases} \tag{18}$$

由式(11)、(14)、(18)得

$$\prod_{k=0}^{M-1} s_k = \begin{cases} 1, & (M = 4k_M + 1) \\ -1, & (M = 4k_M + 3) \end{cases} \tag{19}$$

根据式(19),分析滤波器的对称性组合可表示为:当 $M = 4k_M + 1$ 时,N_a 为偶;当 $M = 4k_M + 3$ 时,N_a 为奇;且偶对称分析滤波器的数目为 $M - N_a$.

M 为奇、偶两种情况的分析滤波器对称性组合总结于表 1.

该表中列出的是 N_a 的奇偶性,N_a 为 0 到 $M-1$ 内奇偶性相同的任何数,而不是如文献[4]所示的只一个数. 例如,当 $M = 6$ 时,N_a 为偶,则 N_a 可以取 0,2,和 4;

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

N_a 为奇，则 N_a 可以取 1，3，和 5；而文献[4]中 N_a 却只能分别取为 2 或 3. 文献[5]中的结果，除未考虑 M 为偶，分析滤波器长度为偶的情况外，均与本文相同. 而文献[6]的结果与文献[4]类似.

表 1　M 通道 LPPRFB 分析滤波器的对称性组合

（用 N_a 的奇偶性表示，且 $0 \le N_a \le M-1$）

类 别	$M=4k_M$	$M=4k_M+1$	$M=4k_M+2$	$M=4k_M+3$
N_1 为奇	奇	偶	偶	奇
N_1 为偶	偶	偶	奇	奇

3　分析滤波器的长度选择方法

由于 $T(z)$ 是一个偶对称、奇长度的 FIR 滤波器，且只有中心点的冲击响应系数不为 0，因此，根据式(2)、(7)，所有分析滤波器长度之和可表示为[4,5]

$$\sum_{k=0}^{M-1} N_k = \begin{cases} (2k_N+1)M, & (M \text{ 为奇}) \\ 2k_N M, & (M \text{ 为偶}) \end{cases} \tag{20}$$

其中 k_N 为正整数. 显然，式(20)包含了分析滤波器的长度奇偶性组合，即由每个分析滤波器的长度奇偶性（奇或偶）构成的组合. 根据式(20)，则分析滤波器的长度奇偶性组合表示为：奇长度分析滤波器的数目 N_{odd} 的奇偶性与 M 相同，且 N_{odd} 可从 0 到 M 闭区间内奇偶性相同的数中选取，而偶长度分析滤波器的数目为 $M-N_{odd}$. 尽管分析滤波器的长度奇偶性组合已得到，但分析滤波器的长度仍不知道该如何选择. 由于式(13)是分析滤波器对称性与长度的内在联系，故分析滤波器的长度也必须满足式(13). 由式(13)得

$$N_k = N_1 + Ml_k, \quad (2 \le k \le M-1) \tag{21}$$

其中 l_k 为整数. 显然式(21)对 N_0 和 N_1 选取没有限制. 但由于所有综合滤波器均具有线性相位，因而 N_0 和 N_1 的选取肯定有约束条件. 根据式(5)，冲击响应系数 $f_k(n)$ 可表示为

$$f_k(n) = (-1)^k \sum_{\substack{\text{over all combinations of} \\ n_k \in \sum_{i=0, i\neq k}^{M-1} n_i = n}} \left[\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{M-1} h_i(n_i) \right] \det \mathrm{U}_{-0k} \tag{22}$$

其中 n_i 是 $h_i(n_i)$ 的变量，矩阵 U_{-0k} 由矩阵 U 删除 0 行，k 列后得到$(0 \le k \le M-1)$.

分析 $f_k(n)$ 对称性的方法与分析 $q(n)$ 相同. 当 $n_0=0$ 时，综合滤波器具有线性相位的条件是式(21). 当 $n_0 \ne 0$ 时，综合滤波器具有线性相位的条件为

$$N_k = N_0 + Ml_k, \quad (1 \le k \le M-1) \tag{23}$$

由式(23)可得

$$N_k = N_1 + M(l_k - l_1), \quad (1 \le k \le M-1) \tag{24}$$

不难发现式(23)、(24)均满足式(13)，故若按式(23)选择分析滤波器的长度，则分析滤波器和综合滤波器均具有线性相位. 然而，表 1 中 N_1 与分析滤波器的对称性有关，那么 N_1 能否换成 N_0？答案是肯定的. 因为当 M 为奇时，N_1 与分析滤波器的对称性无关；当 M 为偶时，N_0 与 N_1 具有相同的奇偶性. 事实上，式(23)中的 N_0 可以换成 $N_i(1 \le i \le M-1)$. 由式(20)、(23)可得

$$\sum_{k=1}^{M-1} l_k = \begin{cases} 2k_N - N_0, & (M \text{ 为偶}) \\ 2k_N - 1 - N_0, & (M \text{ 为奇}) \end{cases} \tag{25}$$

式(25)表明，当为 M 偶时，$\sum_{k=1}^{M-1} l_k$ 与 N_0 具有相同的奇偶性；当 M 为奇时，则二者的奇偶性不同. 除此之外，N_0 的选择没有任何限制. 式(20)、(23)和(25)总结于表 2.

表 2　M 通道 LPPRFB 分析滤波器的长度关系

类别	M 为偶	M 为奇
N_k	N_0+Ml_k	N_0+Ml_k
$\sum_{k=1}^{M-1} l_k$	$2k_N-N_0$	$2k_N-1-N_0$
$\sum_{k=0}^{M-1} N_k$	$2k_N M$	$(2k_N+1)M$

文献[4]的结果显然满足式(23). 将式(23)的 N_0，用 $N_0 = l_0 M + \beta$ 代换，即可得到文献[4]的结果. 当用优化方法确定滤波器组的滤波器系数时，文献[4]的结果要多占用两个自由度. 文献[5]的结果，则显然没考虑 M 为偶，分析滤波器长度为偶的情况. 此外，其分析滤波器长度为 Ml_k+1，也具有局限性. 比如文献[5]的例 1 中，分析滤波器长度$(N_0=53, N_1=N_2=44=53-3\times3)$ 明显满足表 2 中的结果，但不满足文献[5]的结果. 而文献[6]的结果与文献[4]基本相同.

4　分析滤波器类型组合

实系数线性相位的 FIR 滤波器包括偶对称奇长度(SO)、偶对称偶长度(SE)、奇对称奇长度(AO)、奇对称偶长度(AE)四种类型. 由于 LPPRFB 的滤波器均为线性相位 FIR 滤波器，故 LPPRFB 的分析滤波器可以从上述四种线性相位 FIR 滤波器中选取. 但由于 LPPRFB 有 M 个分析滤波器，那么如何确定每个分析滤波器的类型以及如何确定由这 M 个分析滤波器类型构成的所有组合？下面根据 LPPRFB 分析滤波器的对称性组合及长度奇偶性组合，推导分析滤波器类型组合.

在所有分析滤波器中，$H_0(z)$ 为低通滤波器，$H_{M-1}(z)$ 为高通滤波器，其余则为带通滤波器. 由于 AO、AE 滤波器的幅频响应在 $\omega=0$ 处为 0，故 $H_0(z)$ 只能选 SE 和 SO 类型的滤波器；又因 SE、AO 滤波器的幅频响应在 $\omega=\pi$ 处为 0，故 $H_{M-1}(z)$ 只能选为 AE 和 SO 类型的滤波器；而其余分析滤波器可从 AO、AE、SO 和 SE 四种类型中选取. 但当 $H_0(z)$ 和 $H_{M-1}(z)$ 选定之后，

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其余分析滤波器的选取,在对称性方面必须满足表 1 中的对称性组合要求,在长度奇偶性方面必须满足表 2 中包含的长度奇偶性组合. 所有分析滤波器类型组合表示于表 3.

表 3　M 通道 LPPRFB 的分析滤波器类型组合

$H_0(z)$	$H_1(z)$, …, $H_{M-2}(z)$	$H_{M-1}(z)$
SE	根据表 1 和表 2,从 SO、SE、AO 和 AE 这四种类型中选取	AE 或 SO
SO	根据表 1 和表 2,从 SO、SE、AO 和 AE 这四种类型中选取	AE 或 SO

5　分析滤波器的对称性与长度选择

分析滤波器对称性组合是分析滤波器对称性选择的依据. 由于分析滤波器类型组合包含分析滤波器对称性组合,故根据表 3 可选定分析滤波器的对称性. 而分析滤波器的长度则可根据表 2 选择. 下面就举例说明当 $M=2$、$M=3$ 和 $M=4$ 时,分析滤波器类型组合的选择过程. 当 $M=2$ 时, N_{odd}为 0 和 2,即 N_0 和 N_1 同偶或同奇. 显然,根据表 3,分析滤波器类型组合为(SE AE) 和(SO SO). 当 $M=3$ 时,根据表 1,可知 N_a 为 1,而由于 N_{odd}为 1 和 3. 当 $H_0(z)$ 为 SE 时, N_{odd} 为 1,因此如果 $H_2(z)$ 为 AE,则 $H_1(z)$ 为 SO;如果 $H_2(z)$ 为 SO,则 $H_1(z)$ 为 AE;当 $H_0(z)$ 为 SO 时, N_{odd}为 1 和 3,因此如果 $H_2(z)$ 为 AE,则 $H_1(z)$ 为 SE;如果 $H_2(z)$ 为 SO,则 $H_1(z)$ 为 AO. 显然三通道 LPPRFB 的分析滤波器类型组合为(SE SO AE)、(SE AE SO)、(SO SE AE) 和(SO AO SO). 同理可得四通道 LPPRFB 的分析滤波器类型组合,如表 4 所示.

表 4　四通道 LPPRFB 的分析滤波器组合

$H_0(z)$	$H_1(z)$	$H_2(z)$	$H_3(z)$
SE	SE	AE	AE
SE	AE	SE	AE
SO	SO	AO	SO
SO	AO	SO	SO

表 4 中列出了四通道 LPPRFB 的所有分析滤波器类型组合. 在文献[5]的例 3 中,分析滤波器($H_0(z)$, $H_1(z)$, $H_2(z)$, $H_3(z)$)的类型组合为(SO,SO,AO,SO). 显然,该组合可在表 4 中找到;而分析滤波器的长度为 $N_0=57$, $N_1=N_2=57-4\times2$, $N_3=57-4\times3$,该长度明显满足表 2 中的结果.

6　结论

基于 M 通道 LPPRFB 的线性相位和理想重建特性,本文提出了 M 通道 LPPRFB 分析滤波器对称性与长度选择的一般方法:即根据表 3 中分析滤波器类型组合选择分析滤波器的对称性,根据表 2 中分析滤波器长度之间的关系选择分析滤波器的长度. 该方法通过了严格的理论推导,并得到 M 通道 LPPRFB 的实际结果验证. 因此,可以确信 M 通道 LPPRFB 分析滤波器对称性与长度选择难题已得到有效解决.

参考文献:

[1] T Q Nguyen, P P Vaidyanathan. Two channel perfect reconstruction FIR QMF structures which yield linear-phase analysis and synthesis filters[J]. IEEE Trans Acoust, Speech, Signal Processing, 1989, 37(5): 676 - 690.

[2] P Saghizadeh, A N Willson. Using unconstrained optimization in the design of two-channel perfect-reconstruction linear-phase FIR filter banks[A]. In Proc 37th Midwest Symp. Circuits Syst [C]. Lafayette, LA: 1995. 1053 - 1056.

[3] M Vetterli, C Herley. Wavelets and filter banks: theory and design[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1992, 40(9): 2207 - 2232.

[4] T D Tran, T Q Nguyen. On M-channel linear phase FIR filter banks and application in image compression[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1997, 45(9): 2175 - 2187.

[5] P Saghizadeh, A N Willson. A new approach to the design of critically sampled M-channel uniform band perfect reconstruction linear phase FIR filter banks[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1998, 46(6): 1544 - 1557.

[6] S Basu, H Choi. Hermite reduction methods for generation of a complete class of linear-phase perfect reconstruction filter banks - part I: theory[J]. IEEE Trans Circuits Syst. II, 1999, 46(4): 434 - 447.

[7] P P Vaidyanathan. Multirate systems and filter banks[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993. 228 - 228.

作者简介:

彭安金　男,1967 年生于四川汉源,博士,副教授. 在国内外发表学术论文近 20 篇,主要研究方向为多速率滤波器组理论及其应用.

E-mail: pengaj@sina.com

庄圣贤　男,1964 年生于湖南益阳,教授,博士生导师. 主要研究领域包括:滤波器组及多速率系统设计,复杂数字信号处理算法、结构及高速、低功耗超大规模集成电路与系统设计. 近期发表学术论文 30 余篇,被 SCI,EI 收录 10 余篇.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net